Retardierte Funktionen

und

Potentialstreuung

Inauguraldissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin 1961

4!

vorgelegt von

Gerhard Berendt

aus Berlin

aus dem Institut für Theoretische Physik

der Freien Universität Berlin

Retardierte Funktionen

und

Potentialstreuung

Inauguraldissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Gerhard Berendt

aus Berlin

aus dem Institut für Theoretische Physik

der Freien Universität Berlin

Erster Referent : Prof. Dr. Günther LUDWIG

Zweiter Referent: Dr. Kurt JUST

Tag der mündlichen Prüfung: 9. 12. 1960

Tag der Promotion : 27. Feb. 1961

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhaltsverzeichnis
==========

	Einleitung	S. 1
1.	Das einlaufende Feld	S. 3
2.	Das interpolierende Feld und die retardierten Funktionen	S. 4
3.	Die Bedingungsgleichungen für die T - Matrix	S. 11
4.	Räumliches Verhalten der Wellenfunktion . Wirkungsquerschnitt	S. 16
5.	Interpolierende Wellenfunktionen und Schrödinger - Gleichung	S. 19
6.	Anregungen des Vakuums	S. 20
	Anhang I : Der Schrödinger - Operator	S. 24
	Anhang II : Asymptotenbedingungen und Schrödinger - Potential	S. 25
	Anhang III : Der inhomogene Anteil in der T - Matrix	S. 27

Einleitung.

Die herkömmliche Quantenfeldtheorie ist bekanntlich mathematisch inkonsistent und daher ungeeignet zur Beschreibung des Verhaltens von Elementarteilchen. Aus diesem Grunde sind in den letzten Jahren von verschiedenen Autoren ([1] bis [6]) allgemeine Bedingungen für die Feldoperatoren und deren Matrixelemente abgeleitet worden, die lediglich aus gewissen wenigen, physikalisch einsichtigen Postulaten folgen. Da diese "Axiome" von großer Allgemeinheit sind, liefern sie natürlich keine spezifizierte Theorie etwa der Elementarteilchen, sondern bilden nur einen Rahmen für eine eventuell mögliche, genaue Beschreibung solcher quantenfeldtheoretischen Systeme.

Bei der Entwicklung der "axiomatischen Feldtheorie" treten nun im wesentlichen zwei charakteristische Schwierigkeiten auf:

einmal ist bisher noch ungeklärt, ob die benutzten Axiome insoweit miteinander verträglich sind, daß der von ihnen abgesteckte Rahmen einer relativistischen Feldtheorie überhaupt ein nicht triviales Beispiel enthält,

zum anderen sind die anfangs erwähnten allgemeinen Bedingungen so kompliziert, daß ihre Auswertung wenn überhaupt, dann nur mit großer Mühe möglich erscheint.

Um hier weiterzukommen, kann man die Frage untersuchen, ob sich ein quantentheoretisches System angeben läßt, das in allen Einzelheiten bekannt ist, und auf das sich der Formalismus der axiomatischen Feldtheorie übertragen läßt. Als Beispiel für solch ein System bietet sich die gewöhnliche nichtrelativistische quantenmechanische Potentialstreuung an. Wegen des Verzichts auf die relativistische Invarianz ist dieses Beispiel allerdings für die echte Feldtheorie nur von sehr beschränktem Wert; immerhin ist zu hoffen, daß auch noch eine so stark vereinfachte Theorie einigen Aufschluß über die Struktur des verwendeten Formalismus zu geben vermag. Die vorliegende Arbeit befaßt sich deshalb mit der Frage, inwieweit die Methoden der axiomatischen Feldtheorie auf den Fall der nichtrelativistischen Potentialstreuung übertragen werden können und zu welchen Aus-

sagen sie dort führen. Der Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen ist die Konzeption von GLASER, LEHMANN und ZIMMERMANN [3] . Voraussetzung ist also die Existenz eines asymptotisch einlaufenden freien Feldes $A_{in}(x)$, mit dessen Hilfe der Hilbert-Raum aufgebaut wird. Das interpolierende Feld $A(x)$ wird dann daraus mit Hilfe von retardierten Funktionen $r(x;y)$ definiert, wobei die r-Funktionen ein Integralgleichungssystem erfüllen sollen, welches sich hier auf eine einzige Gleichung reduziert.

Unter bestimmten Randbedingungen für die retardierten Funktionen kann man die Existenz eines asymptotisch auslaufenden freien Feldes $A_{out}(x)$ folgern und zeigen, daß das interpolierende Feld für große negative bzw. positive Zeiten schwach gegen die entsprechenden asymptotischen Felder konvergiert. Sofern man auf die volle Translationsinvarianz der r-Funktionen verzichtet, führt die Definition der S-Matrix mit Hilfe der ein- und auslaufenden freien Felder in Verbindung mit der Asymptotenbedingung unmittelbar auf die bekannte Zerlegung der interpolierenden Wellenfunktion in eine einlaufende ebene + auslaufende Kugelwelle sowie auf den üblichen Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt. Eine FOURIER-Transformation der Gleichung für die retardierten Funktionen führt nach Vergleich mit der T-Matrix direkt auf Dispersionsrelationen für die Streuamplitude.

Im letzten Teil der Arbeit wird noch das Problem einer Erweiterung des Formalismus auf den Fall der inelastischen Potentialstreuung diskutiert. Ein wesentliches Merkmal der hier benutzten "axiomatischen" Methode besteht darin, daß an keiner Stelle ein Potential explizit eingeführt zu werden braucht; benutzt werden vielmehr nur ganz allgemeine Eigenschaften des Streuers, denen durch Einführen eines geeigneten "Vakuums" Rechnung getragen wird.

1. Das einlaufende Feld.

Sei $\varphi_\alpha(x)$ ein vollständiges System von Funktionen mit den Eigenschaften

$$\mathbb{L}_x \varphi_\alpha(x) = 0 \,, \tag{1}$$

$$\int_{x^0 \text{ beliebig}} d^3x \; \varphi_\alpha^*(x) \, \varphi_\beta(x) = \delta_{\alpha\beta} \tag{2}$$

und

$$\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \, \varphi_\alpha^*(y) = i \, G(x-y) \tag{3}$$

(s. Anhang I).

Das einlaufende skalare komplexe Feld $A_{in}(x)$ werde durch

$$A_{in}(x) = \sum_\alpha A_{in}^\alpha \, \varphi_\alpha(x) \quad ; \qquad A_{in}^+(x) = \sum_\alpha A_{in}^{\alpha\,+} \, \varphi_\alpha^*(x) \tag{4}$$

definiert und durch

$$[A_{in}(x), A_{in}^+(y)] = i \, G(x-y) \quad ; \qquad [A_{in}(x), A_{in}(y)] = 0 \tag{5}$$

quantisiert.

Für den Aufbau des Hilbert-Raumes werde die Existenz eines Vakuums $|\cdot\rangle$ postuliert, für das

$$A_{in}^\alpha \, |\cdot\rangle = 0 \qquad \text{gelte.} \tag{6}$$

Durch

$$|\alpha_1 \dots \alpha_n \cdot\rangle_{in} = (n_1! \dots n_k!)^{-1/2} \, A_{in}^{\alpha_1\,+} \dots A_{in}^{\alpha_n\,+} \, |\cdot\rangle \tag{7}$$

(n_i = Zahl der jeweils gleichen Indizes)

erhält man eine Basis im Hilbert-Raum. Es folgt sofort

$$\langle \cdot \, \alpha_1 \dots \alpha_n \, | \, A_{in}(x) \, | \, \beta_1 \dots \beta_m \cdot \rangle_{in} = 0 \qquad \text{für} \quad m \neq n+1 \,. \tag{8}$$

Das Matrixelement

$$\psi_\alpha^{in}(x) = \langle \cdot \, | \, A_{in}(x) \, | \, \alpha \cdot \rangle_{in} = \varphi_\alpha(x) \tag{9}$$

wird als Wellenfunktion bezeichnet. Der Index α kann auch durch das

kontinuierliche p ersetzt werden; es gilt dann

$$A_{in}(x) = \int_{p^0=p^2} d^3p \; \frac{a_{in}(p)}{(2\pi)^3} \; e^{ipx} . \tag{10}$$

2. Das interpolierende Feld und die retardierten Funktionen.

Analog zu [3] wird das interpolierende Feld A(x) durch

$$A(x) = \int d^4y \; A_{in}(y) \; L_y^* \, r(x;y) \tag{11}$$

definiert. Die Funktion r(x;y) erfülle die Gleichung

$$r(x;y) = \theta(x^0-y^0) \int d^4u \; d^4v \; G(u-v) \; L_u^* \, r(x;u) \; L_v \, r(y;v)^* , \tag{12}$$

die an die Stelle des Gleichungssystems für die retardierten Funktionen in [3] tritt. Aus Gleichung (12) folgt unmittelbar

$$r(x;y) = 0 \qquad \text{für} \quad x^0 < y^0 . \tag{13}$$

Es gilt nun der folgende Satz:

SATZ I : Erfüllt die Funktion r(x;y) die Gleichung (12) und ist außerdem r(x;y) = r(x-y) , dann ist $r(x;y) = G_{ret}(x-y)$, und das durch (11) definierte interpolierende Feld A(x) stimmt mit dem einlaufenden Feld $A_{in}(x)$ überein. Ferner gilt

$$r(x;y) = -i \; \theta(x^0-y^0) \; \langle \cdot | \, A_{in}(x) \; A_{in}^+(y) \, | \cdot \rangle .$$

Beweis: Zunächst folgt aus (12):

$$r(x;y) - r(y;x)^* = \int d^4u \; d^4v \; G(u-v) \; L_u^* \, r(x;u) \; L_v \, r(y;v)^* .$$

Setzt man $L_y^* \, r(x;y) = \int d^4k \; \sigma(k) \; e^{ik(x-y)}$, dann erhält man nach kurzer Rechnung

$$\int d^4k \; e^{ik(x-y)} \left\{ \frac{\sigma(k)}{k^0-k^2+i\varepsilon} - \frac{\sigma^*(k)}{k^0-k^2-i\varepsilon} \right\} =$$

$$= - \int d^4k \; e^{ik(x-y)} \; 2\pi i \; (2\pi)^4 \, \delta(k^0-k^2) \; |\sigma(k)|^2$$

oder

$$\int d^4k\, e^{ik(x-y)} \left\{ \frac{\sigma(k) - (2\pi)^4 |\sigma(k)|^2}{k^0 - k^2 + i\varepsilon} - \frac{\sigma^*(k) - (2\pi)^4 |\sigma(k)|^2}{k^0 - k^2 - i\varepsilon} \right\} = 0 .$$

Durch komplexe Integration folgert man hieraus

$$\sigma(k) = (2\pi)^{-4}$$

oder

$$\tau(x;y) = (2\pi)^{-4} \int d^4k \, \frac{e^{ik(x-y)}}{k^0 - k^2 + i\varepsilon} = G_{ret}(x-y) .$$

Weiter ist wegen $\mathbb{L}_y^* \tau(x;y) = \mathbb{L}_y^* G_{ret}(x-y) = \delta(x-y)$

aus (11)

$$A(x) = A_{in}(x) ,$$

und schließlich, da $G_{ret}(x-y) = \theta(x^0-y^0)\, G(x-y)$, folgt

$$\tau(x;y) = -i\, \theta(x^0-y^0) \langle 0 | A_{in}(x)\, A_{in}^+(y) | 0 \rangle$$ w. z. b. w.

Die Annahme vollständiger Translationsinvarianz der r-Funktionen liefert also als interpolierendes Feld nur das freie einlaufende Feld. Das ist auch unmittelbar einsichtig; denn einerseits sieht man aufgrund der Definition (11) des interpolierenden Feldes sofort, daß der Kommutator $[A(x), A^+(y)]$ eine c - Zahl sein muß, woraus man analog zu [3] folgern kann, daß die durch das Feld A(x) beschriebenen Teilchen keine Wechselwirkung untereinander ausüben können. Andererseits bedeutet die vollständige Translationsinvarianz der retardierten Funktionen wegen ihres Zusammenhangs mit der T - Matrix - der später noch eingehend behandelt werden wird - die Erhaltung von Energie und Impuls. Unter diesen Voraussetzungen aber kann es sich nur um freie Teilchen handeln.

Bei Vorhandensein eines Potentials nimmt dieses jedoch im Falle elasti-

scher Streuung Impuls, im Falle unelastischer Streuung Impuls und Energie auf. Der hier entwickelte Formalismus - der also eine Wechselwirkung zwischen den gestreuten Teilchen untereinander a priori nicht enthält - sollte demnach gerade eine elastische Potentialstreuung beschreiben, wenn man auf die räumliche, eine unelastische Potentialstreuung dann, wenn man auf die räumliche und zeitliche Translationsinvarianz der retardierten Funktionen verzichtet. Wesentlich ist dabei, daß ein Potential explizit gar nicht eingeführt zu werden braucht. Lediglich dessen Eigenschaft, Impuls bzw. auch Energie aufzunehmen oder abzugeben, wird benutzt. Der Verzicht auf die vollständige Translationsinvarianz der retardierten Funktionen ist gleichbedeutend mit einer entsprechenden Verallgemeinerung des Vakuumzustandes. Während nämlich in der relativistischen Feldtheorie aus $A(x)|\cdot> = 0$ folgt $P^\mu|\cdot> = 0$, wobei P^μ der Operator der infinitesimalen Translation ist, gilt das hier nicht mehr notwendig. Fordert man nur noch zeitliche Translationsinvarianz der r-Funktionen, dann ist auch nur noch $P^\circ|\cdot> = 0$ erfüllbar; verzichtet man sogar hierauf, dann ist das "Vakuum" überhaupt nicht mehr translationsinvariant.

Bevor jedoch spezielle Eigenschaften bezüglich der Translationsinvarianz der r-Funktionen verlangt werden, soll zunächst noch untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen das interpolierende Feld einer Asymptotenbedingung gehorcht. Aussagen hierüber enthalten die beiden folgenden Sätze:

SATZ II : Erfüllt die Funktion $r(x;y)$ die Gleichung (12) und ist außerdem

$$\lim_{x^\circ \to -\infty} \left(\lim_{y^\circ \to -\infty} r(x;y) \right) = -i \cdot \delta(\varphi - \eta) \,, \tag{14}$$

dann gilt für das durch (11) definierte Feld $A(x)$:

$$A_{in}(x) = A(x) - \int d^4y \; G_{ret}(x-y) \, \mathbb{K}_y \, A(y) \,, \tag{15}$$

und es ist

$$r(x;y) = -i \, \theta(x^\circ - y^\circ) \, <\cdot| \, A(x) \, A^+(y) \, |\cdot> \,. \tag{16}$$

Beweis: Gleichung (16) folgt zunächst einfach durch Einsetzen und Benutzung von (12) :

$$-i\,\theta(x^\circ-y^\circ)\,\langle 0|\,A(x)\,A^+(y)\,|0\rangle = -i\,\theta(x^\circ-y^\circ)\int d^4u\,d^4v\,\langle 0|A_{in}(u)\,A_{in}^+(v)|0\rangle \cdot \mathbb{L}_u^* r(x;u)\;\mathbb{L}_v r(y;v)^*$$

$$= r(x;y)\,.$$

Zum Beweis von (15) bildet man

$$A(x) - \int d^4y\; G_{ret}(x-y)\,\mathbb{L}_y A(y) = i\int\limits_{z^\circ=-\infty} d^3z\; A_{in}(z)\,r(x;z) -$$

$$- i\int d^4y \int\limits_{z^\circ=-\infty} d^3z\; G_{ret}(x-y)\,A_{in}(z)\,\mathbb{L}_y r(y;z)\,,$$

woraus nach Anwendung des Greenschen Satzes und Benutzung von (14) folgt:

$$A(x) - \int d^4y\; G_{ret}(x-y)\,\mathbb{L}_y A(y) = -\int\limits_{y^\circ=-\infty} d^3y \int\limits_{z^\circ=-\infty} d^3z\; G(x-y)\,A_{in}(z)\,r(y;z)\,,$$

$$= i\int\limits_{y^\circ=-\infty} d^3y \int\limits_{z^\circ=-\infty} d^3z\; G(x-y)\,A_{in}(z)\,\delta(y-z)\,,$$

$$= i\int\limits_{y^\circ=-\infty} d^3y\; G(\mathbf{y}-\mathbf{y},x^\circ-y^\circ)\,A_{in}(\mathbf{y},y^\circ)\,,$$

$$= A_{in}(x)$$

w. z. b. w.

Die Bedingung (14) bedeutet anschaulich, daß die retardierten Funktionen zur Zeit $-\infty$ der retardierten Funktion des einlaufenden Feldes angeglichen werden müssen, damit das interpolierende Feld bei $t = -\infty$ die Asymptotenbedingung erfüllt. Man darf erwarten, daß die analoge Anpassungsforderung für $t = +\infty$ eine entsprechende Asymptotenbedingung

für ein passend zu definierendes auslaufendes freies Feld garantiert:

SATZ III : Erfüllt die Funktion r(x;y) die Voraussetzung des Satz II, und ist ferner

$$\lim_{y^0 \to +\infty} \left(\lim_{x^0 \to +\infty} r(x;y) \right) = -i \cdot \delta(\varphi - y) \quad , \tag{17}$$

dann gilt für das durch

$$A_{out}(x) = A(x) + \int d^4y \; G_{av}(x-y) \; \mathbb{L}_y \, A(y) \quad , \tag{18}$$

$$= A_{in}(x) + \int d^4y \; G(x-y) \; \mathbb{L}_y \, A(y) \tag{19}$$

definierte Feld $A_{out}(x)$:

$$\mathbb{L}_x \, A_{out}(x) = 0 \tag{20}$$

und

$$[A_{out}(x), A_{out}^{+}(y)] = i \, G(x-y) \, . \tag{21}$$

An die Stelle der Forderung (17) kann auch die stärkere der PT - Invarianz der Theorie treten.

Beweis: Zunächst sieht man aus (19) sofort $\mathbb{L}_x \, A_{out}(x) = 0$.

Ferner ist

$$[A_{out}(x), A_{out}^{+}(y)] = [A_{in}(x), A_{in}^{+}(y)] +$$

$$+ \int d^4u \, d^4v \; G(x-u) \, [A_{in}(v), A_{in}^{+}(y)] \, \mathbb{L}_u \, \mathbb{L}_v^{*} \, r(u;v)$$

$$+ \int d^4u \, d^4v \; G^{*}(y-u) \, [A_{in}(x), A_{in}^{+}(v)] \, \mathbb{L}_v \, \mathbb{L}_u^{*} \, r(u;v)^{*}$$

$$+ \int d^4u \, d^4v \, d^4u' \, d^4v' \; G(x-u) \; G^{*}(y-v) \; [A_{in}(u'), A_{in}^{+}(v')] \cdot$$

$$\cdot \, \mathbb{L}_u \, \mathbb{L}_{u'}^{*} \, r(u;u') \; \mathbb{L}_v^{*} \, \mathbb{L}_{v'} \, r(v;v')^{*} \, .$$

Um an dieser Stelle weiterzukommen, soll nun ein Lemma bewiesen werden, welches auch später noch benutzt werden wird:

LEMMA I : Sei $\lim_{\substack{x^0\to-\infty \\ y^0\to+\infty}} \left(\lim_{\substack{y^0\to-\infty \\ x^0\to+\infty}} r(x;y) \right) = -i \cdot \delta(x-y)$,

und gelte für die Funktionen f(x) und g(x) , die noch von irgendwelchen Parametern abhängen können, die Bedingung

$$\mathbb{L}_x f(x) = \mathbb{L}_x g(x) = 0 ,$$

dann ist das für genügend vernünftige f(x) und g(x) existierende Doppelintegral

$$\int d^4x \int d^4y \; f^*(x)\, g(y)\, \mathbb{L}_x \mathbb{L}_y^* \, r(x;y)$$

unabhängig von der Reihenfolge der Integrationen.

Der Beweis des Lemmas I erfolgt durch zweifache Anwendung des Greenschen Satzes. Es ist

$$\int d^4x \int d^4y \; f^*(x)\, g(y)\, \mathbb{L}_x \mathbb{L}_y^* \, r(x;y) =$$

$$= i \int d^4x \int_{y^0=-\infty} d^3y \; f^*(x)\, g(y)\, \mathbb{L}_x \, r(x;y) ,$$

$$= -\int_{x^0=+\infty} d^3x \int_{y^0=-\infty} d^3y \; f^*(x)\, g(y)\, r(x;y)$$

$$- i \int_{x^0=-\infty} d^3x \int_{y^0=-\infty} d^3y \; f^*(x)\, g(y)\, \delta(x-y) ,$$

und

$$\int d^4y \int d^4x \; f^*(x)\, g(y)\, \mathbb{L}_x \mathbb{L}_y^* \, r(x;y) =$$

$$= i \int d^4y \int\limits_{x^0=+\infty} d^3\xi \; f^*(x)\, g(y)\, \mathbb{L}_y^* \, r(x;y) \quad ,$$

$$= -i \int\limits_{y^0=+\infty} d^3y \int\limits_{x^0=+\infty} d^3\xi \; f^*(x)\, g(y)\, \delta(\xi - y)$$

$$- \int\limits_{y^0=-\infty} d^3y \int\limits_{x^0=+\infty} d^3\xi \; f^*(x)\, g(y)\, r(x;y) \quad ,$$

$$= \int d^4x \int d^4y \; f^*(x)\, g(y)\, \mathbb{L}_x \mathbb{L}_y^* \, r(x;y) \quad ,$$

w. z. b. w.

Mit Hilfe des eben bewiesenen Lemmas kann man nun den oben erhaltenen Ausdruck umformen und erhält:

$$[A_{out}(x),\, A_{out}^+(y)] = i\,G(x-y) + i \int d^4u\, d^4v\, G(x-u)\, G(v-y)\, \mathbb{L}_u \mathbb{L}_v^* \, r(u;v)$$

$$- i \int d^4v\, d^4u\, G(x-u)\, G(v-y)\, \mathbb{L}_u \mathbb{L}_v^* \, r(v;u)^*$$

$$- i \int d^4u\, d^4v\, d^4u'\, d^4v'\, G(x-u)\, G(v-y)\, G(u'-v') \cdot$$

$$\cdot \mathbb{L}_u \mathbb{L}_{u'}^* \, r(u;u')\; \mathbb{L}_v^* \mathbb{L}_{v'} \, r(v;v')^*$$

$$= i\,G(x-y)$$

wegen (12) . w. z. b. w.

Schließlich ist die PT - Invarianz der Theorie gleichbedeutend mit $r(x;y) = r(-y;-x)$, woraus mit (14) sofort (17) folgt.

3 . Die Bedingungsgleichungen für die T - Matrix .

Für das Folgende ist es zweckmäßig , die Gleichung (12) in den Impulsraum zu übertragen . Um den Zusammenhang mit der Streumatrix herzustellen , empfiehlt es sich jedoch , als Ausgangspunkt nicht die retardierten Funktionen selbst , sondern die Größen

$$f(x;y) = \mathbb{L}_x \mathbb{L}_y \, r(x;y) \tag{22}$$

zu betrachten . Die Fouriertransformierte von f(x;y) soll mit $\tilde{f}(p\,|\,q)$ bezeichnet werden :

$$\tilde{f}(p|q) = (2\pi)^{-8} \int d^4x \, d^4y \; e^{-ipx+iqy} \; f(x;y) \; . \tag{23}$$

Dann gilt zunächst das folgende Lemma :

LEMMA II : Sei $\mathbb{L}_x e^{ipx} = 0$ und $\mathbb{L}_x e^{iqx} = 0$, dann ist , (14) und (17) vorausgesetzt ,

$$\left.\begin{aligned} \tilde{f}(p|q) &= (2\pi)^{-8} \int d^4x \, d^4y \; e^{-ipx+iqy} (-i)\, \theta(x^0-y^0)\, \mathbb{L}_x \mathbb{L}_y^* \langle 1 | A(x) A^+(y) | 1 \rangle \\ &\quad + (2\pi)^{-8} \int dt \int d^3x \, d^3y \; e^{-ipx+iqy} \langle 1 | \mathbb{L}_x A(x) \; A^+(y) | 1 \rangle_{|x^0-y^0=t} \\ &= \tilde{f}_{hom}(p|q) + \tilde{f}_{inh}(p|q) \, . \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Beweis : Per definitionem ist

$$\tilde{f}(p|q) = (2\pi)^{-8} \int d^4x \, d^4y \; e^{-ipx+iqy} (-i) \, \mathbb{L}_x \mathbb{L}_y^* \, \theta(x^0-y^0) \langle 1 | A(x) A^+(y) | 1 \rangle \; ,$$

was ausgeschrieben lautet :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(p|q) = (2\pi)^{-8} \int d^4x \, d^4y \; e^{-ipx+iqy} \{ &(-i)\, \theta(x^0-y^0)\, \mathbb{L}_x \mathbb{L}_y^* \langle 1 | A(x) A^+(y) | 1 \rangle \\ &+ \delta(x^0-y^0) \left[\mathbb{L}_x \langle 1 | A(x) A^+(y) | 1 \rangle + \mathbb{L}_y^* \langle 1 | A(x) A^+(y) | 1 \rangle \right] \\ &+ i \, \delta'(x^0-y^0) \langle 1 | A(x) A^+(y) | 1 \rangle \} . \end{aligned}$$

Nun betrachte man den Ausdruck

$$J(p|q) = \int d^4x \, d^4y \; e^{-ipx+iqy} \, \delta(x^0-y^0) \, \mathbb{L}_y^* \langle 1 | A(x) A^+(y) | 1 \rangle \; .$$

$$J(p|q) = -i\int d^4x\, d^4y\ \delta'(x^0-y^0)\, e^{-ipx+iqy}\ \langle\cdot|A(x)A^+(y)|\cdot\rangle$$

$$+i\left\{-\int_{x^0=\infty} d^3\xi \int_{y^0=\infty} d^3\eta + \int_{x^0=-\infty} d^3\xi \int_{y^0=-\infty} d^3\eta\right\} e^{-ipx+iqy}\langle\cdot|A(x)A^+(y)|\cdot\rangle$$

oder $$= -i\int d^4x\, d^4y\ \delta'(x^0-y^0)\, e^{-ipx+iqy}\langle\cdot|A(x)A^+(y)|\cdot\rangle .$$

J(p/q) hebt sich demnach gerade mit dem letzten Summanden von f(p/q) weg . Der zweite Summand hingegen ist einfach

$$(2\pi)^{-8}\int d^4x\, d^4y\ e^{-ipx+iqy}\ \delta(x^0-y^0)\ \mathbb{L}_x\langle\cdot|A(x)A^+(y)|\cdot\rangle =$$

$$=(2\pi)^{-8}\int dt\int d^3\xi\, d^3\eta\ e^{-ipx+iqy}\ \langle\cdot|\mathbb{L}_x A(x)A^+(y)|\cdot\rangle_{|x^0=y^0=t} = \tilde{f}_{inh}(p|q),$$

so daß die Behauptung folgt . Da f(p/q) gemäß (23) die Voraussetzungen des Lemma I erfüllt , sofern p und q auf der Energieschale liegen , folgt weiter , daß dann in (24) auch die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden darf .

Da nun

$$\langle\cdot|A(x)A^+(y)|\cdot\rangle = ir(x;y) - ir(y;x)^* \tag{25}$$

gilt , erhält man mit Hilfe von Gleichung (12) aus (24) :

$$\tilde{f}_{hom}(p|q) = -(2\pi)^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{\zeta-i\varepsilon} \int_{k^0=k^2} d^3k\ \tilde{f}(q;p^0+\zeta|k)\cdot\tilde{f}(q;q^0+\zeta|k)^*, \tag{26}$$

wobei die bekannte Darstellung der Sprungfunktion

$$\theta(x^0-y^0) = (2\pi i)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\zeta(x^0-y^0)}}{\zeta-i\varepsilon}\, d\zeta \tag{27}$$

benutzt wurde . Bildet man damit die Differenz $\tilde{f}(p/q) - \tilde{f}(+q/+p)^*$ und beachtet

$$\frac{1}{\zeta-\zeta_0-i\varepsilon} - \frac{1}{\zeta-\zeta_0+i\varepsilon} = 2\pi i\ \delta(\zeta-\zeta_0), \tag{28}$$

dann folgt aus Gleichung (26) noch

$$\tilde{f}_{hom}(p/q) - \tilde{f}_{hom}(q/p) = -i(2\pi)^5 \int_{k^0=k^2} d^3k \; \tilde{f}(p/k)\,\tilde{f}(q/k)^* \,. \qquad (29)$$

Die Gleichungen (26) und (29) stellen allgemeine Bedingungen für die Streuamplituden dar . Das erkennt man sofort , wenn man beachtet , daß die hier eingeführten Funktionen $\tilde{f}(p/q)$ bis auf einen Faktor mit den T - Matrix - Elementen übereinstimmen . Definiert man nämlich die S - Matrix in üblicher Weise durch

$$S(p/q) = {}_{out}\langle p/q \rangle_{in} \,, \qquad (30)$$

dann folgt mit

$$S(p/q) = (2\pi)^3 \{\delta(q-\eta) - i\,T(p/q)\} \qquad (31)$$

nach dem üblichen Reduktionsverfahren (s. etwa [7]) für die T - Matrix der Ausdruck

$$T(p/q) = (2\pi)^{-3} \int d^4x\, d^4y\, e^{-ipx+iqy}\, f(x;y) \,, \qquad (32)$$

in dem nach Lemma I auch die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden darf , weil p und q auf der Energieschale liegen .
Damit sieht man sofort , daß

$$T(p/q) = T_{hom}(p/q) + T_{inh}(p/q) = (2\pi)^5\, \tilde{f}(p/q) \qquad (33)$$

gilt . Die Gleichungen (26) und (29) schreiben sich in den T - Matrix - Elementen folgendermaßen :

$$T_{hom}(p/q) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{\zeta - i\varepsilon} \int_{k^0=k^2} d^3k \; T(\eta; p^0+\zeta/k)\, T(\eta; q^0+\zeta/k)^* \qquad (34)$$

und

$$T_{hom}(p/q) - T_{hom}(q/p)^* = -i \int_{k^0=k^2} d^3k \; T(p/k)\, T(q/k)^* \,, \qquad (35)$$

woraus man erkennt , daß (35) gerade die Unitaritätsbedingung für die quantenmechanische nichtrelativistische Streuung darstellt, sofern $T_{inh}(p/q) = T_{inh}(q/p)^*$ vorausgesetzt wird ; vgl . dazu Anhang III .
In Gleichung (34) stört zur weiteren Auswertung jedoch zunächst die Integration über die Variable ζ , die im ersten Integral vorkommt und

die durch die in der Grundgleichung (12) vorkommende θ -Funktion bedingt ist .

Um die Gleichungen (34) und (35) weiter auswerten zu können , muß man nun, zusätzlich zu den sehr allgemein gehaltenen Forderungen an die r - Funktionen , die sich lediglich auf deren asymptotisches Verhalten bezogen , noch weitere , einschränkende Bedingungen stellen . Die Integration über ζ läßt sich gerade dann ausführen , wenn man - im Hinblick auf die im vorigen Abschnitt angestellten Überlegungen - für die retardierten Funktionen nur noch zeitliche Translationsinvarianz fordert . Dann kann man nämlich bekannterweise aus dem T - Matrix - Element die δ -Funktion der Energie herausziehen :

$$T(p|q) = 2\pi\, \delta(p^\circ - q^\circ)\; M(\mathfrak{p}|\mathfrak{q}|q^\circ) \tag{36}$$

Im allgemeinen wird $M(\mathfrak{p}|\mathfrak{q}|q^\circ)$ noch von q° , $|\mathfrak{p}|$, $|\mathfrak{q}|$ und dem Winkel zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ abhängen ; sofern jedoch p und q auf der Energieschale liegen - wie es beim realen Streuprozeß natürlich der Fall ist - reduziert sich die Abhängigkeit auf die Energie q° und den Winkel ϑ zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$:

$$M(\mathfrak{p}|\mathfrak{q}|q^\circ) = F(\vartheta, q^\circ) = F_{hom}(\vartheta, q^\circ) + F_{inh}(\vartheta, q^\circ) . \tag{37}$$

Setzt man ferner P T - Invarianz der Theorie voraus , dann gilt ja bekanntlich

$$T(p|q) = T(q|p) \tag{38}$$

woraus unmittelbar

$$F(-\vartheta, q^\circ) = F(\vartheta, q^\circ) \tag{39}$$

folgt . (Zur Herleitung von (37) muß man allerdings noch annehmen , daß das Streuproblem rotationssymmetrisch ist ; denn sonst kann - etwa bei Vorhandensein einer Zylindersymmetrie - die Größe $M(\mathfrak{p}|\mathfrak{q}|q^\circ)$ außer von den genannten Parametern auch von den Winkeln abhängen , die $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ mit der Vorzugsrichtung bilden . Das bringt selbstverständlich keine grundsätzlichen Schwierigkeiten mit sich ; aus Gründen der Einfachheit soll jedoch die Voraussetzung der Drehinvarianz der Theorie im Folgenden ebenfalls gemacht werden .)

Benutzt man all dies , dann kann man die Gleichungen (34) und (35) wie folgt umformen :

$$F_{hom}(\vartheta,q^\circ) = -\int_{k^\circ=k^2} d^3k \; \frac{F(\vartheta',k^\circ)\cdot F(\vartheta'',k^\circ)^*}{k^\circ - q^\circ - i\varepsilon} \qquad (\vartheta' = \mathfrak{A}\, g,k \;\; \vartheta'' = \mathfrak{A}\, y,k) \tag{40}$$

und

$$F_{hom}(\vartheta,q^\circ) - F_{hom}(\vartheta,q^\circ)^* = -2\pi i \int_{k^\circ=k^2} d^3k \; \delta(k^\circ - q^\circ)\, F(\vartheta',k^\circ)\, F(\vartheta'',k^\circ)^* \,. \tag{41}$$

Die Beziehung (40) stellt den - in der hier behandelten Theorie besonders einfachen-Fall einer LOW-artigen Gleichung dar . Gleichungen solcher Struktur kann man , wie DOEBNER gezeigt hat [7] , auch in der axiomatischen Feldtheorie ableiten . Es ist nun zu erwarten , daß das hier vorkommende Beispiel (40) einer derartigen Gleichung infolge seiner sehr einfachen Struktur noch weiter ausgewertet werden kann . Das ist tatsächlich der Fall , weil es möglich ist , die Gleichung (40) mit Hilfe der Unitaritätsbedingung (41) zu vereinfachen . Zu dem Zweck zerlegt man in beiden Gleichungen die Integration über d^3k in eine Integration über die Energie k° und eine solche über die Winkel :

$$F_{hom}(\vartheta,q^\circ) = -\tfrac{1}{2} \int_0^\infty (k^\circ)^{1/2}\, dk^\circ \; \frac{\int d\Omega_k \; F(\vartheta',k^\circ)\; F(\vartheta'',k^\circ)^*}{k^\circ - q^\circ - i\varepsilon} \tag{42}$$

und

$$F_{hom}(\vartheta,q^\circ) - F_{hom}(\vartheta,q^\circ)^* = -\pi i\, (q^\circ)^{1/2} \int d\Omega_k \; F(\vartheta',q^\circ)\; F(\vartheta'',q^\circ)^* \,. \tag{43}$$

Durch Kombination der beiden letzten Gleichungen erhält man endlich :

$$F_{hom}(\vartheta,q^\circ) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty dk^\circ \; \frac{F_{hom}(\vartheta,k^\circ) - F_{hom}(\vartheta,k^\circ)^*}{k^\circ - q^\circ - i\varepsilon} \tag{44}$$

Unter Berücksichtigung von (28) sowie der Beziehung

$$2\cdot P\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_0}\right) = \frac{1}{\zeta-\zeta_0 - i\varepsilon} + \frac{1}{\zeta-\zeta_0 + i\varepsilon} \tag{45}$$

kann man (44) auf die Form

$$F_{hom}(\vartheta, q^\circ) = \frac{1}{2}\left[F_{hom}(\vartheta, q^\circ) - F_{hom}(\vartheta, q^\circ)^*\right] + \frac{1}{2\pi i}\,\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{F_{hom}(\vartheta, q^{\circ\prime}) - F_{hom}(\vartheta, q^{\circ\prime})^*}{q^{\circ\prime} - q^\circ}\, dq^{\circ\prime}$$

bringen , woraus man sieht , daß

$$\left.\begin{aligned} Im\ F_{hom}(\vartheta, q^\circ) &= \text{beliebig} \\ Re\ F_{hom}(\vartheta, q^\circ) &= \frac{1}{\pi}\,\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{Im\ F_{hom}(\vartheta, q^{\circ\prime})}{q^{\circ\prime} - q^\circ}\, dq^{\circ\prime} \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

gilt . Damit erhält man als wesentliches Resultat der vorangegangenen Umformungen :

Die Gleichung (12) für die retardierten Funktionen stellt eine Dispersionsrelation für die Streuamplitude $F_{hom}(\vartheta, q^\circ)$ dar , sofern die r-Funktionen zeitlich translationsinvariant sind , der Randbedingung (14) genügen und die Theorie PT-invariant ist .

4. Räumliches Verhalten der Wellenfunktion . Wirkungsquerschnitt .

Es ist zu erwarten , daß der hier entwickelte Formalismus für große Abstände vom Streuzentrum den gleichen Ausdruck für die interpolierende Wellenfunktion liefern wird , wie man ihn in der Quantenmechanik für den Fall der elastischen Potentialstreuung erhält . In der üblichen stationären Streutheorie setzt man für die Wellenfunktion bekanntlich

$$\psi(\varrho) = e^{i g\cdot\varrho} + \eta_p(\varrho)$$

an , wobei sich $\eta_p(\varrho)$ für große räumliche Abstände vom Streuzentrum wie

$$\eta_p(\varrho) \sim \tau(\vartheta, p^\circ)\,\frac{e^{i|g|r}}{r} \qquad (r = |\varrho|\,;\ \vartheta = \sphericalangle\, g,\varrho)$$

verhält . Es soll nun gezeigt werden , daß die Asymptotenbedingung (15) zu einem vollständig analogen Ausdruck führt , und daß $\tau(\vartheta, p^\circ)$ bis auf einen Faktor mit der Streuamplitude $F(\vartheta, p^\circ)$ übereinstimmt .

Zu diesem Zweck bildet man das Matrixelement von A(x) zwischen dem Vakuum und einem einlaufenden Zustand mit dem Impuls p :

$$\psi_p(x) = \langle \cdot \,|\, A(x) \,|\, p \cdot \rangle_{in}$$

Setzt man hier (14) ein und berücksichtigt, daß $\psi_p^{in}(x) = e^{ipx}$ ist, dann folgt:

$$\psi_p(x) = e^{ipx} + \int d^4y \; G_{ret}(x-y) \; \mathbb{L}_y \langle \cdot \,|\, A(x) \,|\, p \cdot \rangle_{in} \; .$$

Benutzt man jetzt noch Gleichung (11), dann wird nach kurzer Rechnung:

$$\psi_p(x) = e^{ipx} + \int d^3k \; e^{ikq - ip^0x^0} \; \frac{M(k|q|p^0)}{p^0 - k^2 + i\varepsilon} \tag{47}$$

In diesem Ausdruck liegt k nicht auf der Energieschale, so daß $M(k|q|p^0)$ eine Funktion von $|k|$, p^0 und dem Winkel α zwischen q und k ist.

Für den zweiten Summanden in (47) folgt für große $|q| = r$ durch partielle Integration

$$\int d^3k \; e^{ikq} \; \frac{M(|k|, p^0, \alpha)}{p^0 - k^2 + i\varepsilon} = -2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 dk \int_0^{\pi/h} d(\cos\alpha') \; e^{ikr\cos\alpha'} \; \frac{M(|k|, p^0, \alpha)}{p^0 - k^2 + i\varepsilon} \quad , \quad (\alpha' = \chi(q,k))$$

$$= \frac{2\pi}{ir} \int_{-\infty}^{+\infty} k \, dk \left\{ \frac{e^{ikr} \cdot M(|k|, p^0, \vartheta)}{p^0 - k^2 + i\varepsilon} - \frac{M(|k|, p^0, \vartheta - \frac{\pi}{2})}{p^0 - k^2 + i\varepsilon} \right\} .$$

Das zweite Integral verschwindet; das erste kann für $r > 0$ durch einen Halbkreis in der oberen k - Halbebene geschlossen werden und nach dem Residuensatz ausgewertet werden. Es ergibt sich dann

$$\psi_p(x) = e^{ip_\nu x^\nu} - 2\pi^2 \, M(\vartheta, p^0) \; \frac{e^{i|q|r}}{r} \; e^{-ip^0x^0} \; . \tag{48}$$

Demnach ist also

$$\tau(\vartheta, p^0) = -2\pi^2 \cdot M(\vartheta, p^0) = -2\pi^2 \cdot F(\vartheta, p^0) \; . \tag{49}$$

Zur Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts normiert man zweckmäßig die einfallende Welle so, daß pro Flächeneinheit genau ein Teilchen auftrifft. Dazu setzt man etwa nach LUDWIG [8] als einlaufenden Zustand das Wellenpaket

$$|\tilde{q}\cdot\rangle_{in} = (2\pi)^{-1/2} \int d^3k \; \chi(q,k) \, |k\cdot\rangle_{in} \qquad (q = \{q,0,0\})$$

mit

$$\chi(q,k) = \delta^{1/2}(q_x - k_x) \; \delta(q_y - k_y) \; \delta(q_z - k_z)$$

an; dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; |\langle \cdot | A_{in}(x) | \tilde{q}\cdot\rangle_{in}|^2 = 1 \,,$$

und für den differentiellen Wirkungsquerschnitt folgt in bekannter Weise:

$$d\sigma = |S(p|\tilde{q})|^2 \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = |T(p|\tilde{q})|^2 (2\pi)^3 \, d^3p \,.$$

Hieraus ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$d\sigma = 4\pi^4 |F(\vartheta, q^\circ)|^2 \, d\Omega_p = |\tau(\vartheta, q^\circ)|^2 \, d\Omega_p \,, \qquad (50)$$

in voller Übereinstimmung mit der stationären Streurechnung.
Der totale Wirkungsquerschnitt ist

$$\sigma_{tot} = \int d\sigma = 4\pi^4 \int |F(\vartheta, q^\circ)|^2 \, d\Omega_p$$

woraus man durch Kombination mit der Unitaritätsbedingung (41) für $F(\vartheta, q^\circ)$ erhält:

$$\sigma_{tot}(q^\circ) = -\frac{(2\pi)^3}{(q^\circ)^{1/2}} \, \mathrm{Im} \; F(0, q^\circ) \,. \qquad (51)$$

Gleichung (51) stellt das bekanntlich auch in der Quantenmechanik gültige optische Theorem dar.

5. Interpolierende Wellenfunktionen und Schrödinger-Gleichung.

Wie schon zu Beginn hervorgehoben, besteht ein wesentlicher Zug des in den vorangegangenen Abschnitten abgeleiteten Formalismus darin, daß die - sehr allgemeinen - Resultate bereits ohne Einführung eines expliziten Potentials folgen. Es ist jedoch der ganzen Anlage nach zu vermuten, daß man, zumindest für eine gewisse Klasse von Potentialen, die Streulösungen der gewöhnlichen Schrödinger-Gleichung als Spezialfälle des allgemeinen Ansatzes erhält. Diese Erwartung läßt sich leicht verifizieren.

Angenommen, $\chi_\alpha(x)$ sei eine Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$\mathbb{L}_x \chi_\alpha(x) = V(\varphi)\ \chi_\alpha(x)\ , \tag{52}$$

die einen normierbaren Hilbert-Raum-Vektor darstelle. Für eine bestimmte Klasse von Potentialen $V(\varphi)$ (s. Anhang II), kann man Gleichung (52) als Integralgleichung schreiben:

$$\chi_\alpha(x) = \chi_\alpha^-(x) + \int d^4y\, G_{ret}(x-y)\, V(y)\, \chi_\alpha(y) = \chi_\alpha^-(x) + \int d^4y\, G_{ret}(x-y)\, \mathbb{L}_y\, \chi_\alpha(y)\ , \tag{53}$$

oder

$$\chi_\alpha(x) = \chi_\alpha^+(x) + \int d^4y\, G_{av}(x-y)\, V(y)\, \chi_\alpha(y) = \chi_\alpha^+(x) + \int d^4y\, G_{av}(x-y)\, \mathbb{L}_y\, \chi_\alpha(y)\ , \tag{54}$$

wobei die $\chi_\alpha^\pm(x)$ vollständige Lösungen der freien Schrödinger-Gleichung seien:

$$\mathbb{L}_x\, \chi_\alpha^\pm(x) = 0\ ; \quad \sum_\alpha \chi_\alpha^\pm(x)\, \chi_\alpha^\pm(y)^* = i\, G(x-y)\ . \tag{55}$$

Definiert man nun durch

$$\tau_r(x;y) = -i\, \theta(x^\circ - y^\circ) \sum_\alpha \chi_\alpha(x)\, \chi_\alpha(y)^* \tag{56}$$

die retardierten Funktionen, dann folgt unter der Voraussetzung der Orthogonalität

$$\int d^4\varphi\ \chi_\alpha^\pm(x)\, \chi_\beta^\pm(x) = \delta_{\alpha\beta} \tag{57}$$

der $\chi_\alpha^\pm(x)$ die Beziehung:

$$\chi_\alpha(x) = \int d^4y\ \chi_\alpha^-(y)\, \mathbb{L}_y^*\, \tau_r(x;y)\ , \tag{58}$$

und damit aus (56) , (53) und (54) die Gleichung (12) für die Funktionen $r_V(x;y)$, sowie die Randbedingungen (14) und (17). Mithin gelten alle aus (12) , (14) und (17) abgeleiteten Folgerungen auch für die Schrödinger-Streulösungen mit den hier benutzten Eigenschaften, d.h. für solche Potentiale, für die sich die Schrödinger-Gleichung in eine Integralgleichung nach (53) und (54) umformen läßt.

6. Anregungen des Vakuums.

Abschließend soll noch kurz eine Erweiterung des hier entwickelten Formalismus auf den Fall besprochen werden, daß das Vakuum nicht nur eine, sondern mehrere Energiestufen haben kann. Dann nämlich fällt auch die im Vorangegangenen noch angenommene zeitliche Translationsinvarianz der retardierten Funktionen fort, weil ja das "Vakuum" angeregt werden, und das gestreute Teilchen daher eine andere Energie als das einfallende besitzen kann. Es ist deshalb die Frage, inwieweit die Ergebnisse der früheren Abschnitte gültig bleiben und ob nicht möglicherweise die Konzeption des interpolierenden Feldes ganz fallengelassen werden muß. Tatsächlich wird es sich erweisen, daß es jetzt nicht mehr möglich ist, ein interpolierendes Feld sinnvoll einzuführen; hingegen bleiben eine ganze Reihe von wesentlichen Aussagen der vorigen Kapitel zumindest eingeschränkt gültig.

Sei also nun - mit $|n>$ statt wie bisher $|\cdot>$:

$$A_{in}(x)\,|n> = 0 \quad ; \quad P^0\,|n> = E_n\,|n> \quad ; \qquad (n = 1, 2 \ldots N) \tag{59}$$

und

$$[\,\psi_\alpha^{in}(x)\,]_{nm} = <n\,|\,A_{in}(x)\,|\,\alpha\,m>_{in} \; . \tag{60}$$

Durch

$$[\psi_\alpha(x)]_{nm} = \int d^4y\; \varphi_\alpha(y)\; \overleftrightarrow{\square}_y\; \tau_{nm}(x,y) \tag{61}$$

werden die interpolierenden Wellenfunktionen definiert, wobei die retardierten Funktionen die Gleichung

$$r_{nm}(x;y) = \theta(x^0-y^0) \int d^4u\, d^4v\, G(u-v) \sum_{l=1}^{N} L_u^{*} r_{nl}(x;u)\; L_v\, r_{ml}(y;v)^{*} \tag{62}$$

erfüllen sollen. Dann gelten die folgenden, zu Satz II und Satz III analogen Sätze, deren Beweise ebenfalls ganz gleichartig wie dort verlaufen:

SATZ IV : Erfüllen die Funktionen $r_{nm}(x;y)$ die Gleichung (62) und ist außerdem

$$\lim_{x^0\to-\infty} \Big[\lim_{y^0\to-\infty} r_{nm}(x;y) \Big] = -i\,\delta_{nm}\cdot\delta(\varrho-\eta), \tag{63}$$

dann gilt für die durch (61) definierten Wellenfunktionen $[\psi_\alpha(x)]_{nm}$:

$$[\psi_\alpha^{in}(x)]_{nm} = [\psi_\alpha(x)]_{nm} - \int d^4y\; G_{ret}(x-y)\, L_y\, [\psi_\alpha(y)]_{nm} \tag{64}$$

und es ist

$$r_{nm}(x;y) = -i\,\theta(x^0-y^0) \sum_{\alpha} \sum_{l=1}^{N} [\psi_\alpha(x)]_{nl}\, [\psi_\alpha(y)^{*}]_{ml}\ . \tag{65}$$

SATZ V : Erfüllen die Funktionen $r_{nm}(x;y)$ die Gleichung (62) und ist ferner

$$\lim_{y^0\to+\infty} \Big[\lim_{x^0\to+\infty} r_{nm}(x;y) \Big] = -i\,\delta_{nm}\cdot\delta(\varrho-\eta), \tag{66}$$

dann gilt für die durch

$$[\psi_\alpha^{out}(x)]_{nm} = [\psi_\alpha(x)]_{nm} - \int d^4y\; G_{av}(x-y)\, L_y\, [\psi_\alpha(y)]_{nm} \tag{67}$$

$$= [\psi_\alpha^{in}(x)]_{nm} + \int d^4y\; G(x-y)\; L_y\, [\psi_\alpha(y)]_{nm} \tag{68}$$

definierten Funktionen $[\psi_\alpha^{out}(x)]_{nm}$:

$$L_x\, [\psi_\alpha^{out}(x)]_{nm} = 0 \tag{69}$$

und

$$\sum_{\alpha} \sum_{l=1}^{N} [\psi_\alpha^{out}(x)]_{nl}\, [\psi_\alpha^{out}(y)^{*}]_{ml} = i\,\delta_{nm}\, G(x-y). \tag{70}$$

Führt man die S - Matrix durch

$$S_{nm}(p|q) = {}_{out}\langle n\,p\,|\,q\,m\rangle_{in} \quad ; \quad S = 1 - iT\ , \tag{71}$$

ein, dann folgt auch jetzt für die T - Matrix:

$$T_{nm}(p|q) = (2\pi)^{-3} \int d^4x\, d^4y\, e^{-ipx+iqy}\, \mathbb{L}_x\, \mathbb{L}_y^*\, r_{nm}(x|y) \,. \tag{72}$$

Aufgrund der Annahme (59) kann man schreiben :

$$T_{nm}(p|q) = 2\pi\, \delta(p^0 + E_n - q^0 - E_m) \cdot M_{nm}(\vec{p}|\vec{q}|q^0) \,, \tag{73}$$

und man erhält anstelle der Gleichungen (40) und (41) mit

$$M_{nm}(\vec{p}|\vec{q}|q^0) = F_{nm}(\vartheta, q^0) = F_{nm}^{hom}(\vartheta, q^0) + F_{nm}^{inh}(\vartheta|q^0)$$

die folgenden Beziehungen :

$$F_{nm}^{hom}(\vartheta, q^0) = -\int\limits_{k^0=k^2} d^3k \sum_{\ell=1}^{N} \frac{F_{n\ell}(\vartheta', k^0) \cdot F_{m\ell}(\vartheta'', k^0)^*}{k^0 - q^0 + E_\ell - E_m - i\varepsilon} \qquad \begin{matrix}(\vartheta' = * \vec{p}, k \\ \vartheta'' = * \vec{q}, k)\end{matrix} \tag{74}$$

und

$$F_{nm}^{hom}(\vartheta, q^0) - F_{mn}^{hom}(\vartheta, q^0)^* = -2\pi i \int\limits_{k^0=k^2} d^3k \sum_{\ell=1}^{N} \delta(k^0 - q^0 + E_\ell - E_m)\, F_{n\ell}(\vartheta', k^0) \cdot F_{m\ell}(\vartheta'', k^0)^* \,. \tag{75}$$

Leider läßt sich jetzt - wie zu erwarten - die Unitaritätsbeziehung (75) nicht mehr in so einfacher Weise zur Auswertung von (74) verwenden wie oben , und daher folgt hier eine Relation , die man allenfalls als eine verallgemeinerte Dispersionsbeziehung bezeichnen könnte :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Im}\, F_{nm}^{hom}(\vartheta, q^0) &= \text{beliebig} \,, \\ \mathrm{Re}\, F_{nm}^{hom}(\vartheta, q^0) &= -\tfrac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{N} \mathcal{P} \int_0^\infty (q^{0\prime})^{1/2}\, dq^{0\prime}\, \frac{\int d\Omega_{\vec{k}}\, F_{n\ell}(\vartheta', q^{0\prime}) \cdot F_{m\ell}(\vartheta'', q^{0\prime})^*}{q^{0\prime} - q^0 + E_\ell - E_m} \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Mit den Gleichungen (74) bis (76) ist der Fall des Vakuums mit Anregungsstufen natürlich noch längst nicht vollständig diskutiert . Beispielsweise kann man durch einfache Rechnung nachweisen , daß auch jetzt noch die Streulösung in der Form

$$[\psi_p(x)]_{nm} \sim [\psi_p^{in}(x)]_{nm} + \tau_{nm}(\vartheta, p^0)\, \frac{e^{ip'r - ip^0 t}}{r} \tag{77}$$

analog (48) geschrieben werden kann , wobei man nur

$$p' = (p^0 + E_n - E_m)^{1/2}$$

in Übereinstimmung mit dem Energiesatz zu setzen hat . Ebenso lassen sich selbstverständlich auch die differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitte für die möglichen Übergänge

$$\left.\begin{array}{l} |m> \rightarrow |n> \\ |q>_{in} \rightarrow |p>_{out} \end{array}\right\} \quad p^0 + E_n = q^0 + E_m$$

ermitteln . Auf alle diese Einzelheiten soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden , da es sich in diesem Abschnitt nur darum handeln sollte zu zeigen , daß der anfangs entwickelte Formalismus mit den entsprechenden Einschränkungen auch in der Lage ist , den Fall des anregbaren Vakuums- anders ausgedrückt : der inelastischen Potentialstreuung - zu beschreiben .

Herrn Professor Dr. Ludwig bin ich für die Ermöglichung dieser Arbeit zu großem Dank verpflichtet ; den Herren Doebner und Sandhas danke ich für zahlreiche Anregungen und Diskussionen , sowie Herrn Dr. Grawert für die Mitteilung eines Fehlers .

ANHANG I : Der Schrödinger-Operator.

Sei $\mathbb{L}_x \equiv \Delta_x + i \frac{\partial}{\partial x^0}$, $(\hbar = 1 \ , \ 2m = 1)$

dann existieren die zwei linear unabhängigen Greenschen Funktionen

$$G_{ret}(x) = (2\pi)^{-4} \int d^4k \, \frac{e^{ikx}}{k^0 - k^2 + i\varepsilon} \quad \text{und} \quad G_{av}(x) = G^*_{ret}(-x) = (2\pi)^{-4} \int d^4k \, \frac{e^{ikx}}{k^0 - k^2 - i\varepsilon} \ ,$$

für die also gilt

$$\mathbb{L}_x \, G_{ret}(x) = \mathbb{L}_x \, G_{av}(x) = \delta^4(x) \ .$$

Ferner ist $G_{ret}(x) = 0$ für $t < 0$; $G_{av}(x) = 0$ für $t > 0$.

Durch

$$G(x) = G_{ret}(x) - G_{av}(x)$$

wird die Funktion G(x) definiert, für die die Integraldarstellung

$$G(x) = - G^*(-x) = \frac{1}{i} \int_{k^2 = k^2} d^3k \, \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^3}$$ gilt.

Es folgt sofort

$$G(\underline{x}, 0) = - i \, \delta^3(\underline{x}) \ ,$$

und daher vermittelt G(x) die Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems:

$$f(\underline{x}, t) = i \int d^3\underline{y} \; G(\underline{x} - \underline{y}, t - t_0) \; f(\underline{y}, t_0) \ .$$

Für räumlich genügend stark abfallende f(x) und g(x) gilt der Greensche Satz:

$$\int d^4x \, \{ f^*(x) \, \mathbb{L}_x \, g(x) - g(x) \, \mathbb{L}^*_x \, f^*(x) \} =$$

$$= i \int_{x^0 = +\infty} d^3\underline{x} \; f^*(x) \, g(x) - i \int_{x^0 = -\infty} d^3\underline{x} \; f^*(x) \, g(x) \ .$$

ANHANG II : Asymptotenbedingung und Schrödinger-Potential.

Seien $\varphi_\alpha(x)$ Funktionen, die die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen. Dann gilt nach Anhang I :

$$\varphi_\alpha(\underline{x},t) = i\int d^3\underline{y}\; G(\underline{x}-\underline{y},t)\;\varphi_\alpha(\underline{y},0)\;,$$

woraus für festes $\underline{x}$ und $t\to\infty$ folgt:

$$\varphi_\alpha(\underline{x},t) \sim t^{-3/2}\, e^{i\frac{\underline{x}^2}{4t}}\int d^3\underline{y}\;\varphi_\alpha(\underline{y},0)\;\exp\{i\tfrac{\underline{x}^2}{4t}-\tfrac{i}{2t}\underline{x}\cdot\underline{y}\}$$

$$= t^{-3/2}\, e^{i\frac{\underline{x}^2}{4t}}\{\tilde{\varphi}_\alpha(\tfrac{\underline{x}}{2t})+O(\tfrac{1}{t})\}\,.$$

Um zu entscheiden, welchen Bedingungen $V(\underline{x})$ genügen muß, damit aus Gleichung (52) die Asymptotenbedingung (54) - oder was hier auf dasselbe hinausläuft, die Gleichung (53) - folgt, untersucht man das Verhalten des Integranden in (54) für große Zeiten:

$$\int_t^\infty dt' J(t') = \int_t^\infty dt'\int d^3\underline{x}'\; G(x-x')\;V(\underline{x}')\;\chi_\alpha(x')$$

$$= i\sum_\beta \varphi_\beta(x)\int_t^\infty dt'\int d^3\underline{x}'\;V(\underline{x}')\;\varphi_\beta^*(x')\;\chi_\alpha(x')\,.$$

Angenommen, das Integral konvergiere, dann darf im Integranden für $t'\to\infty$ statt $\chi_\alpha(x')$ auch $\varphi_\alpha(x')$ geschrieben werden, so daß folgt:

$$J(t') \sim t'^{-3}\int d^3\underline{x}'\;\tilde{\varphi}_\beta^*(\tfrac{\underline{x}'}{2t'})\;\tilde{\varphi}_\alpha(\tfrac{\underline{x}'}{2t'})\;V(\underline{x}')\,.$$

Wenn nun etwa $V(\underline{x})\sim|\underline{x}|^{-n}$ gilt, dann verhält sich der Integrand für festes $\underline{x}'$ und $t'\to\infty$ wie

$$J(t') \sim t'^{-n}\int d^3\omega\;\tilde{\varphi}_\beta^*(\omega)\;\tilde{\varphi}_\alpha(\omega)\;|\omega|^{-n}\quad;\quad \omega=\tfrac{\underline{x}'}{2t'}\,.$$

Hieraus erkennt man, daß das Integral im Gegensatz zur Annahme der Konvergenz sicher divergiert, falls $n \leq 1$. Demnach darf aus (52) sicher nicht auf (53) und (54) geschlossen werden, falls das Potential wie Coulomb-Potential oder schwächer abfällt. Dieses Resultat ist bereits von verschiedenen Autoren (vgl. etwa [9] und [10]) erwähnt worden. Bei [10] findet sich auch als eine hinreichende Bedingung für die Existenz des Integrals die endliche Ausdehnung des Potentials. Die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Potential $V(r)$, unter denen die Asymptotenbedingungen (53) bzw. (54) erfüllbar sind, ist insofern von Interesse, als die üblichen Ableitungen von Dispersionsrelationen für die quantenmechanische Streuung (vgl. etwa [11] und [12]) stets von der Schrödingergleichung mit einem explizit angenommenen Potential ausgehen. Unter dieser Voraussetzung folgen dann die Dispersionsrelationen, sofern das vorgegebene Potential noch bestimmten zusätzlichen Integrabilitätsbedingungen genügt. Das Problem, ob solche Bedingungen auf die gleiche Klasse von Potentialen führen wie die Forderung der Erfüllbarkeit von (54) ist noch ungelöst.

Anhang III : Der inhomogene Anteil in der T - Matrix

. Das durch Gleichung (24) definierte $\tilde{f}_{inh}(p/q)$ kann in Spezialfällen zur Definition eines Potentials benutzt werden . Da nur Matrixelemente für Null - und Einteilchenzustände vorkommen , kann nämlich der Ausdruck $\langle \cdot | \mathbb{L}_x A(x)\, A^+(y) | \cdot \rangle$ allgemein nur die Form

$$\langle \cdot | \mathbb{L}_x A(x) A^+(y) | \cdot \rangle = \int d^4z\, \phi(x;z)\, \langle \cdot | A(z)\, A^+(y) | \cdot \rangle$$

haben , sofern er nicht überhaupt verschwindet . PT - Invarianz der Theorie bedeutet dann $\phi(x;z) = \phi(-z;-x)$. Ein - und auslaufende asymptotische Felder im Sinne der Gleichungen (15) und (18) existieren gleichzeitig nur , wenn $\phi(x;z) = \phi(z;x)^*$, also ϕ ein hermitescher Kern ist . Dann ist die Unitarität im Sinne von Gleichung (35) automatisch erfüllt . Zeitliche Translationsinvarianz bedingt $\phi(x;z) = \hat{\phi}(\underline{x};\underline{z})\, \delta(x^\circ - z^\circ)$. Für ein räumlich lokales Potential muß schließlich noch $\hat{\phi}(\underline{x};\underline{z}) = V(\underline{x})\, \delta(\underline{x}-\underline{z}) = V(\underline{z})\, \delta(\underline{x}-\underline{z})$ sein . In diesem Fall ist $\tilde{f}_{inh}(p/q)$ bis auf die δ -Funktion der Energie gerade die Fouriertransformierte $\tilde{V}(\underline{p}-\underline{q})$ des Potentials $V(\underline{x})$. Räumliche Lokalität und PT - Invarianz führen auf die Bedingung $V(\underline{x}) = V(-\underline{x})$.

Literaturverzeichnis

[1] Lehmann, Symanzik, Zimmermann, Nuovo Cim. (10), 1 , 205 (1955)

[2] Lehmann, Symanzik, Zimmermann, Nuovo Cim. (10), 6 , 319 (1957)

[3] Glaser, Lehmann, Zimmermann, Nuovo Cim. (10), 6 , 1122 (1957)

[4] Nishijima, Progr. Theor. Phys. 17 , 765 (1957)

[5] Zimmermann, Nuovo Cim. 10 , 597 (1958)

[6] Steinmann, Int. Spring School of Phys. Naples, April 1959 (Preprint)

[7] Doebner, im Erscheinen.

[8] Ludwig, Quantenfeldtheorie, Vorlesungsausarbeitung 1958

[9] Haag, Herbsttagung Oberwolfach 1959, Vortragsausarbeitung

[10] Redmond, Uretsky, Ann. Phys. 9 , 106 , (1960)

[11] Wong, Phys. Rev. 107 , 302 (1957)

[12] Khuri, Phys. Rev. 107 , 1148 (1957)

Lebenslauf.

Am 21. November 1932 als einziger Sohn des Postschaffners Albert Berendt und seiner Ehefrau Paula, geb. Scheinhütte, in Berlin geboren, verbrachte ich meine Kindheit über den Tod meines Vaters am 1. Februar 1938 hinaus in Berlin-Schöneberg. Im Sommer 1943 wurde ich nach Konitz/Westpr. evakuiert und kehrte von dort im Herbst 1944 nach Berlin zurück. Seitdem lebe ich hier mit Ausnahme eines halben Jahres im Winter 1951/52, in dem ich in Freiburg/Br. studierte.
Im September 1959 habe ich geheiratet.
Im April 1939 wurde ich in die 12. Schöneberger Volksschule eingeschult, die ich bis zum Sommer 1943 besuchte. Anschließend war ich ein Jahr Schüler der Oberschule Konitz/Westpr. , bis ich nach meiner Rückkehr nach Berlin in die Oberschule Zossen aufgenommen wurde. Nach dem Zusammenbruch besuchte ich bis zu meiner Reifeprüfung im Juni 1951 die Lichterfelder Oberschule für Jungen in Berlin.
Ich begann mein Studium im WS 1951/52 in der Universität Freiburg/Br. , um anschließend an der Freien Universität Berlin weiterzustudieren. Im Sommer 1954 bestand ich hier das Diplom-Vorexamen in den Fächern Physik, Mathematik und Chemie. Nach weiteren drei Jahren Studiums bestand ich an der gleichen Universität das Diplom-Hauptexamen in den Fächern Physik und Mathematik. Anschließend wurde ich Doktorand im Institut für Theoretische Physik an der Freien Universität Berlin. Seit Oktober 1959 bin ich am gleichen Institut mit der Wahrnehmung einer wissenschaftlichen Assistentenstelle beauftragt. Meine Dissertation vollendete ich im Mai 1960.